

Thomas Lingefjärd

Samspel mellan algebra, geometri, statistik och talteori

Det här är en fortsättning på tre tidigare artiklar om GeoGebra i Nämnaren. Sedan dess har GeoGebra kommit med en ny version, version 3.2, och författaren visar här exempel på hur funktionalitet och verktyg i programmet utvecklas. GeoGebra är fortfarande helt gratis och kan hämtas från www.geogebra.org. Programmet är översatt till svenska.

Ett av de mest iögonfallande tillskotten i den nya versionen är kanske det faktum att GeoGebra nu också innehåller ett kalkylblad. Där skapar man lätt en lista med tal genom att skriva in 1 (i ruta A1) och 2 (i A2) och därefter dra markören nedåt. På samma sätt skapar man lika lätt en korresponderande lista med talvärden i B-kolumnen, genom att skriva $A1 \cdot A1$ i B1 och kopiera nedåt. Detta förfarande ger kvadrattalen till talen i A-kolumnen. Se figur 1.

Genom att markera punktmängden i A- och B-kolumnen och högerklicka ges du möjligheten att skapa en punktlista, där värdena i A-kolumnen blir x-koordinater och värdena i B-kolumnen blir y-koordinater. Punkterna avbildas direkt i det grafiska fönstret men även som en lista L1 i algebra-fönstret. Se figur 2.

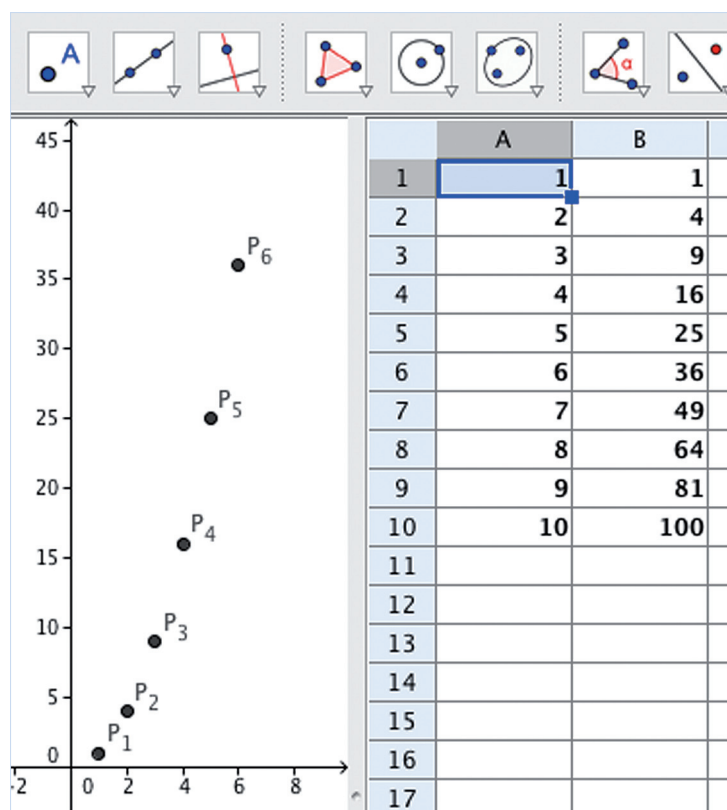
GeoGebra innehåller numera också verktyg för kurvanpassning, så vi provar med att anpassa ett polynom till punktmängden. Kommandot *Regpoly* för punkterna i listan L1 och av grad 2 skrivs som *RegPoly[L_1, 2]* på kommandoraden. Vi ser att vi naturligtvis får ett perfekt polynom anpassat till vår kurvskara. Se figur 3.

Det finns också andra spännande funktioner och kommandon i version 3.2. Ett sådant är kommandot *Talföljd*[uttryck, variabel, startvärde, slutvärde]. Om vi definierar en glidare n från 1 till 100, med steglängd 1 så kan vi skriva in kommandot *Talföljd*[$1/k$, k , 1, n]. Därefter definierar vi också *Summa*[Lista1]. I figur 4 ser du resultatet med summering av termer i den harmoniska serien med horisontell delning av GeoGebra för tydlighets skull.

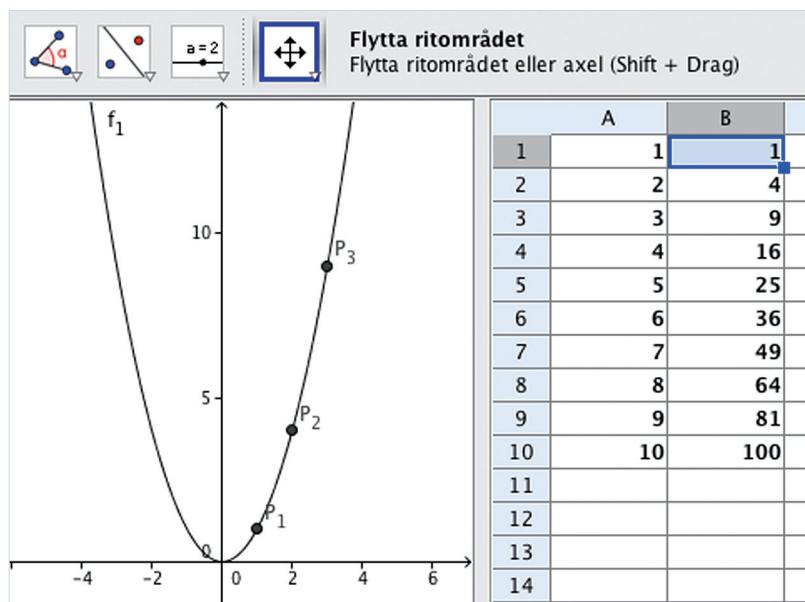
Fig 1.

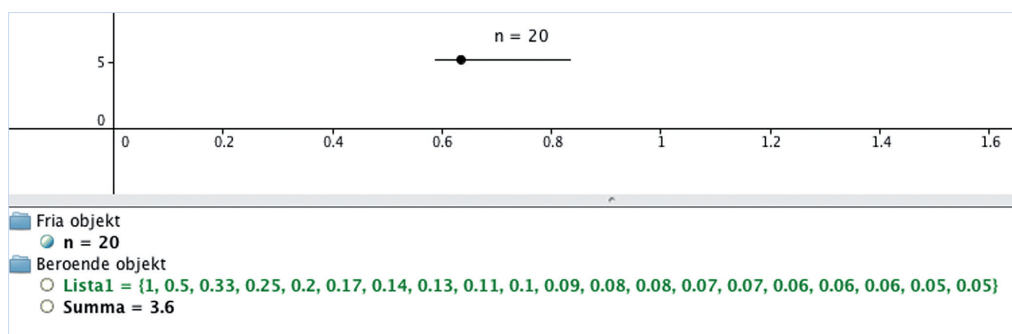
	A	B	C
1	1	1	
2	2	4	
3	3	9	
4	4	16	
5	5	25	
6	6	36	
7	7	49	
8	8	64	
9	9	81	
10	10	100	
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

Figur 2: Samspelet mellan algebra, geometri och talteori i GeoGebra version 3.2.



Figur 3: Kurv-anpassning i GeoGebra.





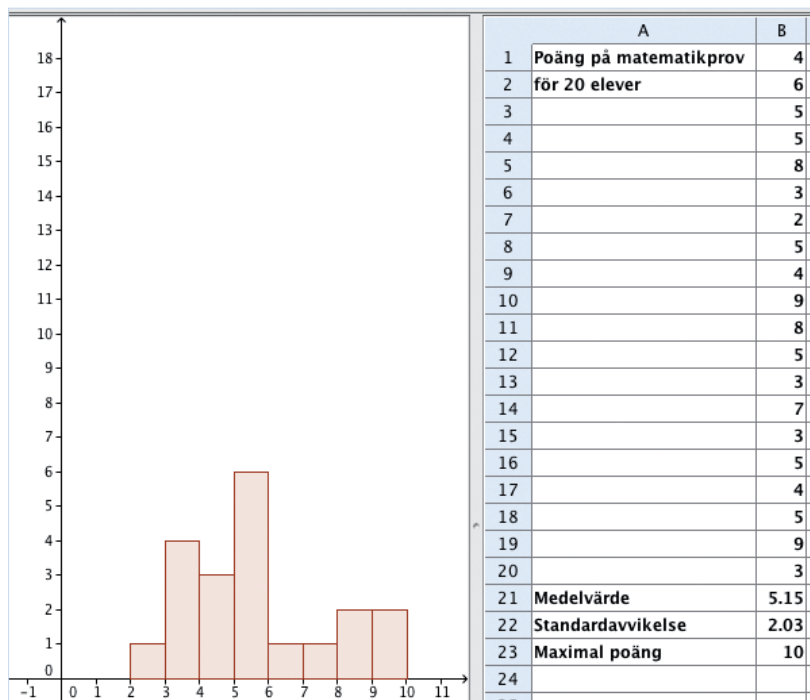
Figur 4: Summering av de första 20 termerna i den harmoniska serien i GeoGebra.

Tillsammans med kalkylbladet har GeoGebra också fått många diagram-möjligheter och statistiska mått bland sina verktyg. Vi tänker oss att vi har haft ett matematikprov i vår klass och att vi har fått följande resultatlista bland våra 20 elever: 4, 6, 5, 5, 8, 3, 2, 5, 4, 9, 8, 5, 3, 7, 3, 5, 4, 5, 9, 3. Dessa 20 värden matar vi in i kalkylbladet (B-kolumnen) och namnger talmängden som Lista.

Nu kan vi också skriva in exempelvis kommandot `Medelvärde[Lista]` i B21 och `SD[Lista]` i B22. SD står för standardavvikelse. Maximal poäng visste vi redan eftersom vi hade konstruerat provet, men GeoGebra kan räkna ut medianen om vi skriver `Median[Lista]` i B24.

Nu vill vi ha ett stapeldiagram till vår resultatmängd och den anger vi genom att skriva in `Stapeldiagram[2, 10, {1, 4, 3, 6, 1, 1, 2, 2}]` på kommandoraden. Syntaxen för stapeldiagram är `Stapeldiagram [<startvärde>, <slutvärde>, <Höjd på staplar>]`. Resultatet av denna databearbetning framgår av figur 5.

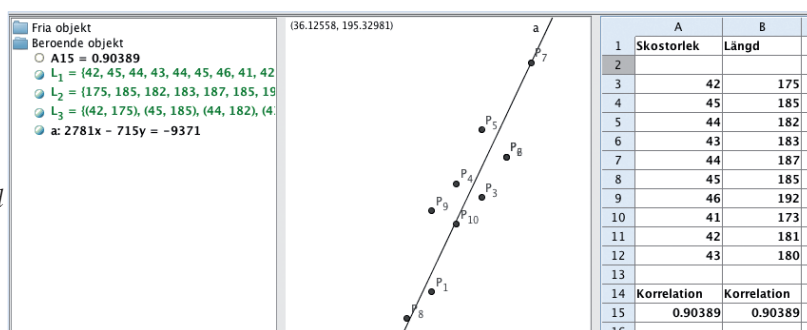
Figur 5: Stapeldiagram och statistiska mått i GeoGebra.



Det finns andra statistiska metoder inbyggda i version 3.2. Ett sådant är *korrelation*. Låt oss anta att vi vill undersöka styrkan i sambandet mellan en grupp individers längd och storlek på fötter. Hänger verkligen individers längd och storlek på fötter ihop? Hur starkt är detta samband? Vi frågar 10 män om deras längd och storlek på skor och får följande lista, där {skostorlek, längd} är angivet för varje person enligt: {42, 175}, {45, 185}, {44, 182}, {43, 183}, {44, 187}, {45, 185}, {46, 192}, {41, 173}, {42, 181}, {43, 180}.

Nu matar vi in dessa värden i kalkylbladet enligt figur 6. Precis som tidigare, så markerar vi kolumnerna med våra värden och ber GeoGebra skapa en lista med punkter. Den listan kommer att få namnet L_3 . Korrelation i GeoGebra beräknas genom koefficienten till Pearsons produktmomentkorrelation, r , som är ett tal mellan -1,0 och 1,0 vilket motsvarar det linjära förhållandet mellan två datauppsättningar. Den går att beräkna genom att definiera cell A15 = $SXY[L_3] / \sqrt{SXX[L_3] * SY Y[L_3]}$, eller genom att skriva in $Korrelation[L_3]$ i cell B15. Jag har valt att översätta den engelska versionens kommando PMCC till kommandot *Korrelation* i den svenska versionen.

Figur 6:
Korrelationen mellan längd och skostorlek beräknad i GeoGebra samt regressionslinje genom punktmängden, med $r = 0,90389$.



Om vi nu följer kalkylbladet genom att bocka av under menyalternativet *Visa*, så får vi fram det grafiska fönstret igen. Om vi högerklickar på det så kan vi ändra skalan i x -led och y -led till $35 < x < 50$ och $150 < y < 200$. Med hjälp av kommandot $RegressionLinX[L_3]$ kan vi nu också få regressionslinjen genom vår punktmängd.

Slutligen vill jag återigen anknyta till GeoGebras utmärkta kommando *Talföljd*. Det är förvisso inte ett nytt kommando, men det kan användas till alla slags talföljder såsom aritmetiska eller geometriska talföljder och det är lätt och snabbt att definiera talföljder i GeoGebra.

Låt oss anta att vi vill summera alla tresiffriga tal som är delbara med sju. Det innebär att ett sådant tal går att skriva som $7 \cdot k$ och att vi startar med det första tresiffriga talet som är delbart med 7, det vill säga 105. Då måste startvärdet för k vara 15. Det högsta tresiffriga talet som är delbart med sju är 994, vilket motsvarar ett värde på $k = 142$. Kommandot $Talföljd[7k, k, 15, 142]$ ger en lista av tal som GeoGebra lägger i $List1$. Kommandot $Summa[List1]$ ger summan 70336. Hitintills har jag ansett att Excel är lämpligast för att kontrollera den här typen av samband, men GeoGebra är faktiskt lika snabbt i detta exempel.

LITTERATUR

- Lingefjärd, T. (2008). Samspelet mellan algebra och geometri. *Nämnamnaren* (35)4, 28–31.
 Lingefjärd, T. (2009). GeoGebra – för de yngre. *Nämnamnaren* (36)1, 38–41.
 Lingefjärd, T. (2009). GeoGebra i gymnasieskolan. *Nämnamnaren* (36)2, 45–50.